Cvičení IV

Teorie

Kužely (navazujeme na minulé cvičení):

- **kužel** je množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$, pro kterou $0 \in K$ a $\forall x \in K,\ \alpha \geq 0$: $\alpha x \in K$,
- **konvexní kužel** je množina K, pro kterou $0 \in K$ a $\forall x, y \in K,\ \alpha, \beta \geq 0$: $\alpha x + \beta y \in K$,
- **konvexní polyedrický kužel** je konvexní kužel, který je zároveň konvexní polyedrická množina.

Definice 1 (Obaly)**.** Pro neprázdnou množinu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme (vždy přes *konečné* podmnožiny $\emptyset \neq I \subseteq S$)

$$\begin{aligned}
\text{lineární obal} \quad \mathrm{L}(S) &= \Big\{ \textstyle\sum_{s\in I} \lambda(s)\, s \ :\ \lambda(s) \in \mathbb{R} \Big\}, \\
\text{afinní obal} \quad \mathrm{Aff}(S) &= \Big\{ \textstyle\sum_{s\in I} \lambda(s)\, s \ :\ \lambda(s) \in \mathbb{R},\ \sum_{s\in I} \lambda(s) = 1 \Big\}, \\
\text{nezáporný obal} \quad \mathrm{pos}(S) &= \Big\{ \textstyle\sum_{s\in I} \lambda(s)\, s \ :\ \lambda(s) \geq 0 \Big\}, \\
\text{konvexní obal} \quad \mathrm{conv}(S) &= \Big\{ \textstyle\sum_{s\in I} \lambda(s)\, s \ :\ \lambda(s) \geq 0,\ \sum_{s\in I} \lambda(s) = 1 \Big\}.
\end{aligned}$$

Pro prázdnou množinu klademe $\mathrm{L}(\emptyset) = \mathrm{pos}(\emptyset) = \{0\}$ a $\mathrm{Aff}(\emptyset) = \mathrm{conv}(\emptyset) = \emptyset$.

Definice 2. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina.

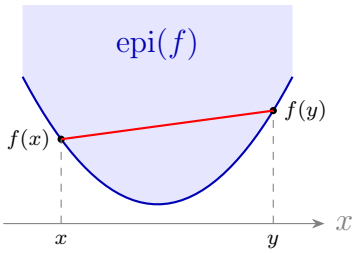
- Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ je *směrem* množiny A, pokud existuje $a \in A$ tak, že celá polopřímka $\{a + ts : t \geq 0\}$ leží v A. Množinu všech směrů značíme $\mathrm{direct}(A)$.
- Bod $a \in A$ je *krajní bod* množiny A, pokud neexistuje dvojice bodů $x, y \in A$, $x \neq y$ a $0 < \alpha < 1$ tak, aby $a = \alpha x + (1-\alpha)y$. Množinu všech krajních bodů značíme $\mathrm{ext}(A)$.
- Směr $s \in \mathrm{direct}(A)$, $s \neq 0$ je *krajní směr* množiny A, pokud neexistuje dvojice směrů $x, y \in \mathrm{direct}(A)$, $x, y \notin \mathrm{pos}(\{s\})$ a $\alpha, \beta > 0$ tak, aby $s = \alpha x + \beta y$. Množinu krajních směrů jednotkové délky značíme $\mathrm{extd}(A) = \{s : \|s\| = 1,\ s \text{ je krajní směr } A\}$.

Věta 1. Je-li P neprázdný konvexní polyedr, pak má konečně mnoho krajních bodů a $P = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(P))$. Je-li K konvexní polyedrický kužel, který neobsahuje žádnou přímku, pak je $\mathrm{extd}(K)$ konečná a $K = \mathrm{pos}(\mathrm{extd}(K))$.

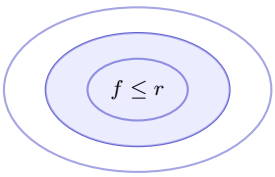
Konvexní funkce

Definice 3. Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a $f : D \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *konvexní* na D, pokud $\forall x, y \in D$ a $\forall \lambda \in [0,1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Funkce f je *konkávní*, je-li $-f$ konvexní.

Definice 4. *Epigraf* funkce $f : D \to \mathbb{R}$ je množina $\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in D \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$. Funkce f je konvexní právě tehdy, když je $\mathrm{epi}(f)$ konvexní množina.



tětiva leží nad grafem



úrovňové množiny konvexní funkce

Definice 5. Nechť $f \in C^2(D)$ (existují a jsou spojité druhé parciální derivace). *Hessova matice* je $H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^{n}$.

Definice 6. Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *pozitivně semidefinitní* ($A \succeq 0$), pokud $x^T Ax \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, a *pozitivně definitní* ($A \succ 0$), pokud $x^T Ax > 0$ pro všechna $x \neq 0$.

Tvrzení 1. Nechť D je otevřená konvexní množina a $f \in C^2(D)$. Pak f je konvexní na D právě tehdy, když $H_f(x) \succeq 0$ pro všechna $x \in D$.

Tvrzení 2 (Sylvestrovo kritérium)**.** Pro symetrickou matici A jsou ekvivalentní:

1. $A \succeq 0$,
2. všechna vlastní čísla A jsou nezáporná,
3. všechny *hlavní minory* A (determinanty podmatic se stejnými indexy řádků a sloupců) jsou nezáporné.

Dále $A \succ 0$ právě tehdy, když jsou všechny *vedoucí* hlavní minory $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \det\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $\ldots$, $D_n = \det A$ kladné. *Pozor:* pro semidefinitnost nestačí $D_k \geq 0$ jen u vedoucích minorů, např. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ má $D_1 = D_2 = 0$, ale není $\succeq 0$.

Věta 2 (Úrovňové množiny)**.** Je-li $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní a $f : D \to \mathbb{R}$ konvexní, pak je pro každé $r \in \mathbb{R}$ konvexní *úrovňová množina* (level set)

$$L_r(f) = \{x \in D : f(x) \leq r\}$$

(i množina $\{x \in D : f(x) < r\}$). Jsou-li tedy $g_1, \ldots, g_m$ konvexní, je množina $\{x : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ konvexní (průnik konvexních množin). Opačná implikace neplatí: např. $f(x) = x^3$ má všechny úrovňové množiny konvexní (intervaly), ale konvexní není.

Důkaz. Pro $x, y \in L_r(f)$ a $\lambda \in [0,1]$ je $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq \lambda r + (1-\lambda) r = r$. □

Příklady

Příklad 1. Kužely.

(a) Ověřte, že $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$ je konvexní kužel, který neobsahuje žádnou přímku.

(b) Rozhodněte, které z množin jsou kužel, konvexní kužel, konvexní polyedrický kužel:

$$K_1 = \{(x,y) : xy \geq 0\}, \qquad K_2 = \{(x,y) : y \geq |x|\}, \qquad K_3 = \{(x,y) : y \geq |x| + 1\},$$

$$K_4 = \{(x,y) : y \geq 0\}, \qquad K_5 = \{(x,y,z) : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Příklad 2. Obaly. Určete (a nakreslete) $\mathrm{conv}(S)$, $\mathrm{pos}(S)$, $\mathrm{Aff}(S)$ a $\mathrm{L}(S)$ pro

(a) $S = \{[0,1],\ [1,0],\ [1,1]\}$,
(b) $S = \{[1,1],\ [2,2]\}$,
(c) $S = \{[1,0],\ [0,1]\}$,
(d) $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (jednotková kružnice).

Příklad 3. Bonus. Dokažte, že pro každou množinu S platí $\mathrm{conv}(S) \subseteq \mathrm{Aff}(S) \cap \mathrm{pos}(S)$. Platí vždy rovnost? Ukažte, že rovnost platí, pokud $0 \notin \mathrm{Aff}(S)$.

Příklad 4. Krajní body a směry. Pro následující množiny určete $\mathrm{ext}(A)$ a $\mathrm{extd}(A)$:

(a) $A = \{(x,y) : x + 2y \geq 2,\ -2x + 3y \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,
(b) jednotkový kruh $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
(c) kužel $K = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y\}$ z příkladu 1,
(d) polorovina $\{(x,y) : y \geq 0\}$,
(e) $\{(x,y) : y \geq x^2\}$.

Množinu z (a) zapište jako součet $\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(A)) + \mathrm{pos}(\mathrm{extd}(A))$.

Bonus: Jak by vypadala množina $\mathrm{direct}(A)$?

Příklad 5. Bonus. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní.

(a) Dokažte, že vnitřní bod A nemůže být krajním bodem A.
(b) Je každý hraniční bod A krajním bodem? Jak je to pro čtverec a pro kruh?

Příklad 6. Dokažte následující vlastnosti.

1. Pokud $f, g : D \to \mathbb{R}$ jsou konvexní, pak $\alpha f + \beta g$ je konvexní pro $\alpha, \beta \geq 0$.
2. Pokud $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i \in I$ jsou konvexní funkce, pak $\sup_{i \in I} f_i$ je konvexní funkce.
3. Nechť $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní neklesající a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní, pak $h \circ g$ je konvexní.

Příklad 7. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

(a) $f(x_1, \ldots, x_n) = |x_1| + \cdots + |x_n|$,
(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $y > 0$,
(c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^4$,
(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$,
(e) $f(x,y) = xy \log(xy)$, $x, y > 0$.

Příklad 8. Rozhodněte, která z následujících množin je konvexní:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^x + e^y \leq 10\}$,
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5,\ e^x + e^y \leq 10\}$.

Příklad 9. Bonus. Rozhodněte, zda jsou následující množiny a funkce konvexní, a svá tvrzení dokažte. V případě, že množina konvexní není, najděte trojici bodů, která porušuje definici konvexity.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le (y-1)^2,\ x+2y \ge 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$,
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2x+3y^2-6y \le 10,\ |x|+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$,
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (e^x+y^3)\log(e^x+y^3) \le 15,\ x \le 2\}$,
(d) $f(x,y) = \exp(x^2+e^{-y})+6xy$ na $(1,\infty)\times(0,\infty)$,
(e) $f(x,y) = \log\left(\dfrac{e^{x+ay}}{1+e^{x+ay}}\right)$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.