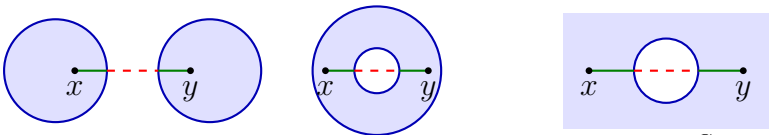
Cvičení III – řešení

Konvexita a množinové operace

Ve všech důkazech ověřujeme definici: vezmeme dva body x, y z dané množiny a $\lambda \in [0,1]$ a ukážeme, že $\lambda x + (1-\lambda)y$ leží v množině. Pro protipříklad stačí najít *trojici* x, y, λ, pro kterou to neplatí. Prázdná množina je konvexní.

Příklad 1. Sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk, násobek



(a) $A \cup B$ (c) $A \setminus B$ (d) A^C

(a) **Nemusí.** $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ v $\mathbb{R}$, $x = 0$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} \notin A \cup B$.

(b) **Musí.** Nechť $x, y \in A \cap B$, $\lambda \in [0,1]$. Pak $x, y \in A$ a z konvexity A je $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$; stejně tak $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$, tedy bod leží v $A \cap B$. Stejný argument funguje pro průnik libovolného (i nekonečného) systému konvexních množin.

(c) **Nemusí.** $A = [0,1]$, $B = \{\frac{1}{2}\}$, $x = 0$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

(d) **Nemusí.** $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, $A^C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = -1$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

(e) **Musí.** Pro $A = \emptyset$ je $\alpha A = \emptyset$, pro $\alpha = 0$ je $\alpha A = \{0\}$, obě konvexní. Jinak nechť $x, y \in \alpha A$, tj. $x = \alpha\xi$, $y = \alpha\eta$ pro $\xi, \eta \in A$. Pak

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \alpha\big(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta\big) \in \alpha A,$$

protože $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in A$.

„*Nemusí*“ neznamená „nikdy není“: např. $A \cup B$ je konvexní pro $B \subseteq A$.

Příklad 2. Uzávěr, vnitřek a součty

(a) $\mathrm{clo}(A)$ **je konvexní.** Nechť $x, y \in \mathrm{clo}(A)$. Existují posloupnosti $x_k \to x$, $y_k \to y$ s $x_k, y_k \in A$. Z konvexity A je $\lambda x_k + (1-\lambda)y_k \in A$ a tato posloupnost konverguje k $\lambda x + (1-\lambda)y$. Limita bodů z A leží v $\mathrm{clo}(A)$.

(b) $\mathrm{int}(A)$ **je konvexní.** Nechť $x, y \in \mathrm{int}(A)$, existuje tedy $\varepsilon > 0$ s $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ a $U_\varepsilon(y) \subseteq A$. Označme $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Pro libovolné w s $\|w\| < \varepsilon$ je

$$z + w = \lambda\,(x + w) + (1-\lambda)\,(y + w) \in A,$$

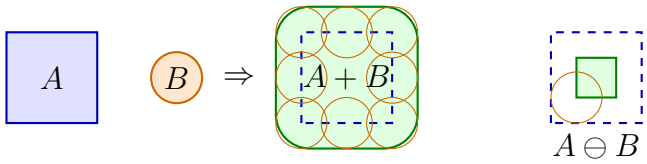
protože $x + w \in U_\varepsilon(x) \subseteq A$ a $y + w \in U_\varepsilon(y) \subseteq A$. Tedy $U_\varepsilon(z) \subseteq A$ a $z \in \mathrm{int}(A)$. (Vnitřek může být prázdný, ten je také konvexní.)

(c) $A + B$ **je konvexní.** Pro $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$ je $A + B = \emptyset$. Jinak nechť $x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$ s $a_i \in A$, $b_i \in B$. Pak

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \underbrace{\big(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2\big)}_{\in A} + \underbrace{\big(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2\big)}_{\in B} \in A + B.$$

(d) $A - B$ **je konvexní**, protože $A - B = A + (-1)B$ a $(-1)B$ je konvexní podle 1(e).

(e) $A \ominus B$ **je konvexní.** Platí $x + B \subseteq A \iff x + b \in A\ \forall b \in B \iff x \in A - b\ \forall b \in B$, tedy $A \ominus B = \bigcap_{b\in B}(A - b)$. Posunutí $A - b = A + \{-b\}$ je konvexní podle (c) a průnik konvexních množin je konvexní podle 1(b).



Obrázek: pro čtverec A a kruh B (se středem v počátku) je $A + B$ „nafouknutý“ čtverec (posouváme kruh po celém čtverci), $A \ominus B$ jsou ta x, pro která se kruh $x + B$ vejde do A („zmenšený“ čtverec).

Příklad 3. Bonus: konvexita přes středy

(a) Nemusí.

$A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: aritmetický průměr dvou racionálních čísel je racionální, ale $\mathbb{Q}$ není konvexní ($x = 0$, $y = 2$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dává $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Pomocné tvrzení: dyadické kombinace.

Nechť A má vlastnost ze zadání. Pak pro všechna $x, y \in A$ a každé dyadické $\mu = k/2^n \in [0, 1]$ je $\mu x + (1 - \mu)y \in A$.

Důkaz indukcí podle n. Pro $n = 0$ je $\mu \in \{0, 1\}$ a tvrzení je triviální. Nechť platí pro n a $\mu = k/2^{n+1}$. Je-li k sudé, je μ tvaru $k'/2^n$. Je-li k liché, je $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ pro $\mu_{1,2} = (k \mp 1)/2^{n+1}$, což jsou zlomky se jmenovatelem 2^n, a

$$\mu x + (1 - \mu)y = \tfrac{1}{2}\underbrace{\big(\mu_1 x + (1 - \mu_1)y\big)}_{\in A} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\big(\mu_2 x + (1 - \mu_2)y\big)}_{\in A} \in A.$$

(b) Uzavřená: musí.

Pro $\lambda \in [0, 1]$ zvolíme dyadická $\mu_k \to \lambda$. Body $\mu_k x + (1 - \mu_k)y$ leží v A a konvergují k $\lambda x + (1 - \lambda)y$. Protože je A uzavřená, leží limita v A.

(c) Otevřená: musí.

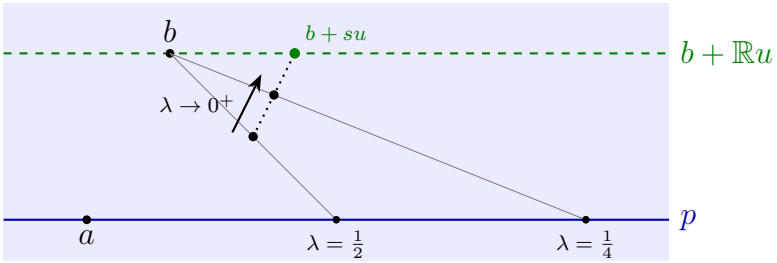
Nechť $x, y \in A$, $\lambda \in (0, 1)$, $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, a $U_\varepsilon(y) \subseteq A$. Pro dyadické $\mu \in (0, 1)$ definujme $y_\mu = \dfrac{z - \mu x}{1 - \mu}$, takže $z = \mu x + (1 - \mu)\, y_\mu$. Pro $\mu \to \lambda$ je $y_\mu \to \dfrac{z - \lambda x}{1 - \lambda} = y$, můžeme tedy zvolit dyadické μ tak blízko λ, aby $y_\mu \in U_\varepsilon(y) \subseteq A$. Podle pomocného tvrzení je pak $z = \mu x + (1 - \mu)y_\mu \in A$.

Příklad 4. Bonus: přímka v uzavřené konvexní množině

Nechť $p = \{a + tu : t \in \mathbb{R}\} \subseteq M$, $u \neq 0$, a $b \in M$. Chceme ukázat $b + su \in M$ pro každé $s \in \mathbb{R}$. Pro $\lambda \in (0, 1)$ leží bod $a + \frac{s}{\lambda}u$ na přímce p, tedy v M, a z konvexity

$$\lambda\Big(a + \frac{s}{\lambda}u\Big) + (1 - \lambda)b = b + su + \lambda(a - b) \in M.$$

Pro $\lambda \to 0^+$ tyto body konvergují k $b + su$, a protože je M uzavřená, je $b + su \in M$.



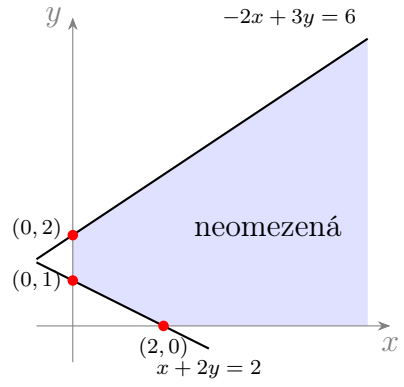
Body $a + \frac{s}{\lambda}u$ na p utíkají do nekonečna, jejich kombinace s b se blíží k $b + su$ (zde $s = 1{,}5$).

Poznámka. Bez uzavřenosti tvrzení neplatí: $M = \{(x, y) : 0 \leq y < 1\} \cup \{(0, 1)\}$ je konvexní, obsahuje osu x i bod $b = (0, 1)$, ale vodorovnou přímku procházející b neobsahuje.

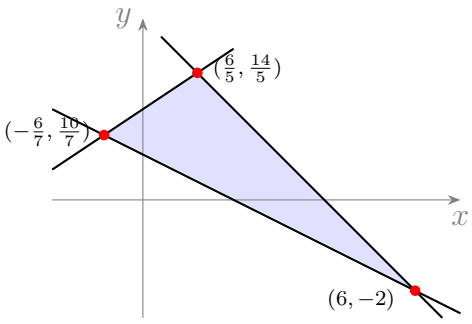
Polyedrické množiny a kužele

Příklad 5. Typ množin

Každá podmínka $a^T x \geq c$ (resp. $\leq$) určuje uzavřenou polorovinu, obě množiny jsou tedy *konvexní polyedrické*. Rozhoduje omezenost.



(a)



(b)

(a) Konvexní polyedrická množina, která není polyedrem.

Je neomezená: např. body $(t, 0)$ splňují všechny podmínky pro $t \geq 2$. Vrcholy (krajní body) jsou $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ – dále viz příklad 10(a).

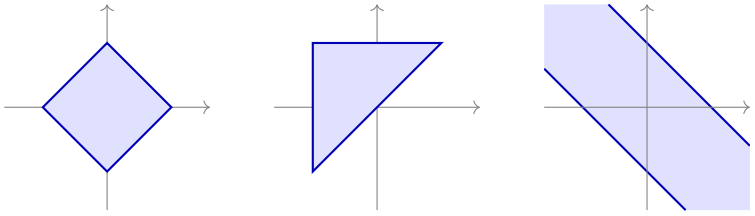
(b) Konvexní polyedr (trojúhelník).

Hraniční přímky se protínají ve třech bodech:

$$\begin{aligned} x + 2y = 2,\ -2x + 3y = 6 \ &\Rightarrow\ x = 2 - 2y,\ -4 + 7y = 6 \ \Rightarrow\ (-\tfrac{6}{7}, \tfrac{10}{7}), \\ x + 2y = 2,\ x + y = 4 \ &\Rightarrow\ y = -2 \ \Rightarrow\ (6, -2), \\ -2x + 3y = 6,\ x + y = 4 \ &\Rightarrow\ x = 4 - y,\ -8 + 5y = 6 \ \Rightarrow\ (\tfrac{6}{5}, \tfrac{14}{5}). \end{aligned}$$

Každý z bodů splňuje i zbylou podmínku (např. $(6, -2)$: $-12-6 = -18 \leq 6$), takže množinou je trojúhelník s těmito vrcholy – je omezená. Pozor: v (b) *nejsou* podmínky $x, y \geq 0$.

Příklad 6. Které množiny jsou polyedry



(a) polyedr (b) polyedr (c) není polyedr

(a) $|x| + |y| \leq 1 \iff \pm x \pm y \leq 1$ (všechny čtyři kombinace znamének), průnik čtyř polorovin. Je omezená ($|x|, |y| \leq 1$) – **polyedr**, „L_1 kruh“ s vrcholy $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

(b) Tři poloroviny $x \geq -1$, $y - x \geq 0$, $y \leq 1$; trojúhelník s vrcholy $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ – **polyedr**.

(c) $|x+y| \leq 1 \iff -1 \leq x+y \leq 1$, průnik dvou polorovin – konvexní polyedrická množina, ale **není polyedr**: pás obsahuje celou přímku $\{t(1, -1) : t \in \mathbb{R}\}$, je neomezený.