Cvičení II – řešení

Formulace

Příklad 1. Dopravní problém s investicí do infrastruktury

Proměnné

- $x_{ij} \geq 0 \ldots$ množství zlata přepravené z naleziště i do města j,
- $y_{ij} \in \{0, 1\} \ldots$ $y_{ij} = 1$, pokud postavíme železnici mezi i a j.

(a) Obecný model

$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(f_{ij}\, y_{ij} + c_{ij}\, x_{ij} \right) \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, && i = 1, \ldots, m && \text{(kapacita naleziště)} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, && j = 1, \ldots, n && \text{(poptávka města)} \\
& x_{ij} \leq M_{ij}\, y_{ij}, && \forall i, j && \text{(převoz jen po postavené trati)} \\
& x_{ij} \geq 0,\ y_{ij} \in \{0, 1\}, && \forall i, j,
\end{aligned}$$

kde $M_{ij} = \min\{s_i, d_j\}$ je horní mez množství přepraveného po trati (i, j). Vazba $x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij}$ zaručuje, že při $y_{ij} = 0$ je $x_{ij} = 0$. Opačný směr (postavit trať a nepoužít ji) není třeba hlídat, protože $f_{ij} > 0$ a minimalizace nepoužitou trať nepostaví. (Nelineární varianta se součinem $x_{ij}\, y_{ij}$ viz poznámka u příkladu 3.)

(b) Konkrétní data

Celková kapacita $\sum s_i = 190$ převyšuje celkovou poptávku $\sum d_j = 180$, úloha je tedy přípustná. Meze $M_{ij} = \min\{s_i, d_j\}$:

M_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	50	50	50
$i = 2$	50	50	50
$i = 3$	60	50	60
$i = 4$	30	30	30

$$
\begin{aligned}
\min\ & 15y_{11} + 20y_{12} + 25y_{13} + 10y_{21} + 18y_{22} + 22y_{23} \\
& + 12y_{31} + 14y_{32} + 19y_{33} + 20y_{41} + 17y_{42} + 23y_{43} \\
& + 4x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} \\
& + 6x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 7x_{41} + 8x_{42} + 6x_{43} \\
\text{s.t. } & x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 50, \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 50, \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 60, \qquad x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 30, \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \ge 60, \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \ge 50, \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \ge 70, \\
& x_{ij} \le M_{ij}\, y_{ij}, \quad x_{ij} \ge 0,\ y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\dots,4,\ j = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Příklad 2. Klasický problém batohu

(a)

Proměnná $x_i \in \{0,1\}$ udává, zda předmět i vezmeme ($x_i = 1$), či ne.

$$
\max \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W, \qquad x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,n.
$$

(b) Překročení kapacity s penalizací

Přirozený zápis je

$$
\max \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i - P \cdot \max\Big\{0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i - W\Big\}, \qquad x_i \in \{0,1\},
$$

který ale není lineární. Zavedeme proměnnou $e \ge 0$ … počet kg nad limit:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i - P\, e \\
\text{s.t. } & \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W + e, \\
& e \ge 0,\ x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

Podmínky dávají $e \ge \max\{0, \sum_i w_i x_i - W\}$. Protože $P > 0$ a maximalizujeme, bude v optimu e co nejmenší, tj. platí rovnost.

Příklad 3. Batoh s množstevní cenou

Proměnné

Značení volíme stejně jako u hodnot: x_i patří k p_i, $\tilde{x}_i$ patří k $\tilde{p}_i$.

- $x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ … počet kusů typu i započtených za základní hodnotu p_i,
- $\tilde{x}_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ … počet kusů typu i započtených za množstevní hodnotu $\tilde{p}_i$,
- $y_i \in \{0, 1\}$ … $y_i = 1$, pokud se u typu i uplatní množstevní hodnota.

Počet kusů typu i v batohu je $q_i = x_i + \tilde{x}_i$. Konstanta $M_i = \lfloor W/w_i \rfloor$ je horní mez počtu kusů, zde $M = (10, 6, 4, 5, 3)$.

Pro každý typ platí právě jeden režim:

- $y_i = 0$: všechny kusy za p_i a je jich méně než K_i ($\tilde{x}_i = 0$, $x_i \leq K_i - 1$),
- $y_i = 1$: všechny kusy za $\tilde{p}_i$ a je jich aspoň K_i ($x_i = 0$, $\tilde{x}_i \geq K_i$).

MILP model (přesný pro libovolné $\tilde{p}_i$)

$$
\begin{aligned}
\max \ & \sum_{i=1}^{n} \left(p_i\, x_i + \tilde{p}_i\, \tilde{x}_i \right) \\
\text{s.t.} \ & \sum_{i=1}^{n} w_i\, (x_i + \tilde{x}_i) \leq W, && \text{(N) nosnost} \\
& x_i \leq (K_i - 1)(1 - y_i), && \text{(U) } q_i \geq K_i \Rightarrow \text{musí platit } \tilde{p}_i \\
& \tilde{x}_i \geq K_i\, y_i, && \text{(V1) } \tilde{p}_i \text{ jen při } q_i \geq K_i \\
& \tilde{x}_i \leq M_i\, y_i, && \text{(V2) } \tilde{p}_i \text{ jen v aktivním režimu} \\
& x_i, \tilde{x}_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ y_i \in \{0, 1\}, && i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Podmínka (U) říká zároveň, že při $y_i = 0$ je kusů za p_i nejvýše $K_i - 1$, a že při $y_i = 1$ se kusy nemíchají ($x_i = 0$).

Které podmínky jsou nutné?

Záleží na tom, zda je $\tilde{p}_i$ větší, nebo menší než p_i. Obecné pravidlo: stačí modelovat ten směr logiky, proti kterému optimalizace „tlačí“.

Typ s $\tilde{p}_i > p_i$ (sleva, hodnota se zvýší). Optimalizace „tlačí“ kusy do $\tilde{x}_i$ (jsou cennější), model tedy musí hlídat neoprávněné přiznání $\tilde{p}_i$:

- (V1) je nutná, jinak $y_i = 1$, $\tilde{x}_i = 1$ dá $\tilde{p}_i$ za jediný kus;
- (V2) je nutná, jinak $y_i = 0$, $\tilde{x}_i > 0$ dá $\tilde{p}_i$ bez splnění K_i;
- (U) je pro optimum nadbytečná: řešení, kde nárok na $\tilde{p}_i$ vznikl, ale část kusů je za nižší p_i, zlepšíme přesunem těchto kusů z x_i do $\tilde{x}_i$.

Typ s $\tilde{p}_i < p_i$ (hodnota se sníží). Optimalizace „tlačí“ kusy do x_i a hodnotě $\tilde{p}_i$ se vyhýbá, model tedy musí hlídat, aby se jí nevyhnula neoprávněně:

- (U) je nutná, jinak by šlo vzít $q_i \geq K_i$ kusů, všechny za vyšší p_i;
- (V2) je nutná, jinak by šlo kusy míchat ($x_i = K_i - 1$ za p_i a zbytek za $\tilde{p}_i$);
- (V1) je pro optimum nadbytečná: aktivovat $\tilde{p}_i$ s méně než K_i kusy znamená započítat je za nižší hodnotu.

Podmínka	Co modeluje	$\tilde{p}_i > p_i$	$\tilde{p}_i < p_i$
(U) $x_i \le (K_i - 1)(1 - y_i)$	$q_i \ge K_i \Rightarrow \tilde{p}_i$	nadbytečná	**nutná**
(V1) $\tilde{x}_i \ge K_i y_i$	$\tilde{p}_i \Rightarrow q_i \ge K_i$	**nutná**	nadbytečná
(V2) $\tilde{x}_i \le M_i y_i$	$\tilde{p}_i$ jen při $y_i = 1$	**nutná**	**nutná**

(a)

Všechny typy mají $\tilde{p}_i > p_i$, stačí tedy (N), (V1), (V2).

(b)

Typy $1, 3, 5$ mají $\tilde{p}_i > p_i$ (hodnota se zvýší, potřebují (V1)), typy 2 a 4 mají $\tilde{p}_i < p_i$ (hodnota se sníží, potřebují (U)). Nejjednodušší je použít celý model se všemi podmínkami (U), (V1), (V2) pro všechna i; ten je správný vždy, bez ohledu na znaménko $\tilde{p}_i - p_i$.

Poznámka: častý studentský přístup se součinem (správný, ale nelineární)

Místo dvou proměnných $x_i, \tilde{x}_i$ vezmeme jen celkový počet kusů q_i a binární y_i a rozdělení vytvoříme *vynásobením*:

$$x_i = (1 - y_i)\, q_i, \qquad \tilde{x}_i = y_i\, q_i, \qquad \text{tj.} \qquad \max \sum_{i=1}^{n} \big(p_i + (\tilde{p}_i - p_i)\, y_i\big)\, q_i.$$

Podobně lze vazby na K_i zapsat součinem, např. $y_i(q_i - K_i) \ge 0$. Takový model je *přesný* a nepotřebuje žádné M_i (podmínku (V2) zajistí sám součin), ale je *nelineární*: součin $y_i q_i$ není konvexní ani konkávní a spolu s celočíselností jde o MINLP, na který nestačí LP/MILP řešiče. Linearizace spočívá právě v tom, že součin nahradíme novou proměnnou ($\tilde{x}_i = y_i q_i$) a jeho význam vynutíme lineárními podmínkami s mezí M_i.

Stejně „nesprávně“ lze psát i **příklad 1**: přepravené množství po trati (i, j) je $x_{ij}\, y_{ij}$ (bez železnice se nepřepraví nic), tedy

$$\min \sum_{i,j} \big(f_{ij}\, y_{ij} + c_{ij}\, x_{ij}\, y_{ij}\big), \qquad \sum_{j} x_{ij}\, y_{ij} \le s_i, \qquad \sum_{i} x_{ij}\, y_{ij} \ge d_j.$$

Lineární model z příkladu 1 vznikne opět tím, že součin $x_{ij} y_{ij}$ nahradíme samotnou proměnnou x_{ij} a jeho význam („bez trati nic“) vynutíme podmínkou $x_{ij} \le M_{ij}\, y_{ij}$.

Příklad 4. Řezný problém

(a) Vzory řezu

Délky požadovaných latěk označíme $\ell = (80, 50, 30)$ cm a poptávku $d = (120, 310, 150)$. Vzor j je určen počty a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} latěk délky 80, 50 a 30 cm uřezaných z jedné laťky, přičemž $\sum_i \ell_i a_{ij} \le 200$. Stačí uvažovat *maximální* vzory, do kterých se už žádný další kus nevejde, tj. odřezek $r_j = 200 - \sum_i \ell_i a_{ij} < 30$. Každý jiný vzor vznikne z některého maximálního vynecháním kusů (viz poznámka u modelu).

vzor j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_{1j} (80 cm)	0	0	0	0	0	1	1	1	2
a_{2j} (50 cm)	0	1	2	3	4	0	1	2	0
a_{3j} (30 cm)	6	5	3	1	0	4	2	0	1
odřezek r_j	20	0	10	20	0	0	10	20	10

(b) Model

Proměnná $x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ udává, kolik latěk rozřežeme podle vzoru j.

Obecně (pro m délek a J vzorů):

$$\min \sum_{j=1}^{J} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{J} a_{ij}\, x_j \geq d_i, \;\; i = 1, \ldots, m, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \;\; j = 1, \ldots, J.$$

Pro naše data ($m = 3$, $J = 9$):

$$\begin{aligned} \min \; & \sum_{j=1}^{9} x_j \\ \text{s.t.} \; & x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 \geq 120 && \text{(80 cm)} \\ & x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_7 + 2x_8 \geq 310 && \text{(50 cm)} \\ & 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_6 + 2x_7 + x_9 \geq 150 && \text{(30 cm)} \\ & x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad j = 1, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Proč $\geq$ a proč $\min \sum_j x_j$**.** Vyrobí-li plán víc kusů, než je potřeba, přebytečné kusy odložíme a jsou také odpadem. Firma tak má přesně požadovaný počet latěk a celkový odpad (odřezky i přebytečné kusy) je

$$\text{odpad} = 200 \sum_j x_j - \underbrace{(120 \cdot 80 + 310 \cdot 50 + 150 \cdot 30)}_{= 29\,600 \text{ cm}},$$

takže minimalizace odpadu je totéž jako minimalizace počtu rozřezaných latěk. Díky nerovnostem $\geq$ také stačí maximální vzory: nemaximální vzor nahradíme maximálním a kusy navíc započteme jako odpad. Kdybychom chtěli rovnosti $=$, museli bychom vypsat *všechny* vzory (i nemaximální) a minimalizovat $\sum_j r_j x_j$.