Cvičení II

Formulace

Příklad 1. Dopravní problém s investicí do infrastruktury. Nacházíme se na divokém západě, kde potřebujeme zajistit dopravu zlata z nalezišť do měst. Máme m nalezišť označených $i = 1, \dots, m$ a n měst označených $j = 1, \dots, n$. Každé naleziště i má kapacitu s_i, která určuje maximální množství zlata, jež lze vytěžit. Každé město j má poptávku d_j, kterou je třeba uspokojit.

Abychom mohli zlato převážet, musíme nejprve postavit železnici mezi nalezištěm i a městem j, což vyžaduje jednorázový náklad f_{ij}. Po výstavbě železnice můžeme přepravovat zlato za cenu c_{ij} na jednotku přepraveného množství. Cílem je

- rozhodnout, které železnice postavit, aby bylo možné zlato přepravovat,
- optimalizovat množství přepravovaného zlata tak, aby celkové náklady (součet nákladů na výstavbu železnic a přepravu) byly minimální.

(a) Formulujte obecný model.
(b) Napište variantu pro $m = 4$, $n = 3$ a data $s = (50, 50, 60, 30)$, $d = (60, 50, 70)$:

f_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	15	20	25
$i=2$	10	18	22
$i=3$	12	14	19
$i=4$	20	17	23

c_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	4	6	5
$i=2$	3	5	7
$i=3$	6	4	3
$i=4$	7	8	6

Příklad 2. Klasický problém batohu – Knapsack problem. Máme množinu n předmětů, kde každý předmět i má hodnotu c_i (Kč) a hmotnost w_i (kg). Kapacita batohu je W (kg). Cílem je vybrat podmnožinu předmětů tak, aby byla maximalizována celková hodnota, aniž by byla překročena kapacita batohu.

(a) Formulujte optimalizační úlohu.
(b) Co když mohu kapacitu batohu překročit, ale platím penalizaci P (Kč/kg) za každý kg přes limit?

Příklad 3. Batoh s množstevní cenou. Turista si vybírá vybavení do batohu s nosností $W = 20$ kg. K dispozici má $n = 5$ typů předmětů a od každého typu může vzít libovolný počet kusů. Předmět typu i má hmotnost w_i a hodnotu p_i. Vezme-li turista alespoň K_i kusů typu i, změní se hodnota *každého* kusu tohoto typu na $\tilde{p}_i$. Cílem je zvolit počty kusů tak, aby celková hodnota byla maximální a nebyla překročena nosnost batohu.

(a) *Množstevní sleva:* $\tilde{p}_i > p_i$ pro všechna i (např. díky lepší využitelnosti vybavení). Formulujte úlohu pro data

i	1	2	3	4	5
w_i (kg)	2	3	5	4	6
p_i	6	8	12	10	14
$\tilde{p}_i$	8	10	15	13	18
K_i	3	2	3	2	2

(b) Co když hodnota $\tilde{p}_i$ může být i *menší* než p_i (např. další kusy stejného vybavení už nejsou tolik užitečné)? Upravte model pro data

p_i	6	8	12	10	14
$\tilde{p}_i$	8	7	15	9	18

Příklad 4. Řezný problém – Cutting stock problem. Truhlářská firma má k dispozici laťky o délce 200 cm. Při výrobě plotu potřebuje firma přesně 120 latěk 80 cm dlouhých, 310 latěk 50 cm a 150 latěk 30 cm. Cílem je sestavit takový plán, kdy je odpad minimální.

(a) Vypište všechny přípustné způsoby (vzory) rozřezání jedné laťky.
(b) Formulujte optimalizační úlohu.

Vázané extrémy

Příklad 5. Nalezněte extrémy funkce

$$f(x,y) = xy + 1 \quad \text{na množině} \quad x^2 + 2y^2 - 1 = 0.$$

Teorie

Uvažujme úlohu

$$\text{extr } f(x,y) \quad \text{za podmínky} \quad g(x,y) = 0,$$

kde f, g mají spojité parciální derivace. Množina $M = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ je typicky křivka v rovině, takže extrémy hledáme pouze na ní (*vázané* extrémy), nikoli na celém $\mathbb{R}^2$.

Definice 1. *Lagrangeovou funkcí* úlohy rozumíme funkci

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y),$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ se nazývá *Lagrangeův multiplikátor*.

Věta 1 (Lagrangeova věta)**.** Nechť (x^*, y^*) je lokální extrém f na množině M a nechť $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0$. Pak existuje $\lambda^* \in \mathbb{R}$ takové, že (x^*, y^*, λ^*) je stacionárním bodem L, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -\, g(x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Interpretace. Poslední rovnice je jen původní vazba $g(x,y) = 0$, derivace podle λ tedy zaručuje, že zůstáváme na množině M. První dvě rovnice lze zapsat vektorově jako

$$\boxed{\nabla f(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)}$$

tj. v bodě vázaného extrému je gradient f násobkem gradientu g.