Cvičení I – řešení

Formulace

Příklad 1. Výrobní plánování

1. Proměnné

- x_1 … množství výrobku V_1 vyrobené za den (kg),
- x_2 … množství výrobku V_2 vyrobené za den (kg).

Proměnné jsou *spojité* (kilogramy lze dělit) a *nezáporné*.

2. Formulace

Data přehledně:

	V_1	V_2	k dispozici
S_1 (kg)	2	5	20
S_2 (kg)	6	1	15
Z_1 (h)	0	2	7
zisk (Kč/kg)	2	4	

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + 5x_2 \le 20 \quad \text{(surovina } S_1\text{)} \\
& 6x_1 + \ x_2 \le 15 \quad \text{(surovina } S_2\text{)} \\
& \qquad 2x_2 \le 7 \quad \text{(stroj } Z_1\text{)} \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

3. Další možné zápisy

Maticově: $\max\{c^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$, kde

$$
c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}.
$$

Řádky matice A odpovídají zdrojům (S_1, S_2, Z_1), sloupce výrobkům (V_1, V_2).

Pomocí sum (indexově): označme $J = \{V_1, V_2\}$ množinu výrobků a $I = \{S_1, S_2, Z_1\}$ množinu zdrojů; c_j je zisk z 1 kg výrobku j, a_{ij} spotřeba zdroje i na 1 kg výrobku j a b_i kapacita zdroje i. Pak

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{j \in J} c_j\, x_j \\
\text{s.t. } & \sum_{j \in J} a_{ij}\, x_j \le b_i, \quad i \in I, \\
& x_j \ge 0, \qquad\qquad j \in J.
\end{aligned}
$$

Tento zápis je stejný pro libovolný počet výrobků a zdrojů – mění se jen data. Tak se modely i *implementují*.

4. Kde očekáváme řešení?

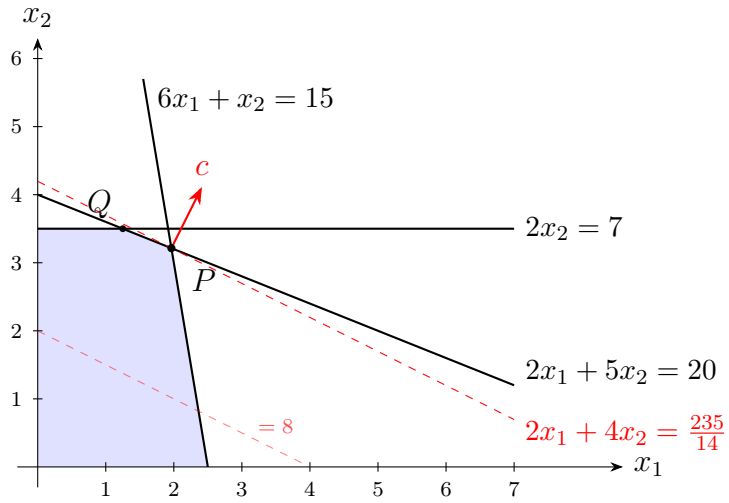
Účelová funkce je lineární, její gradient $c = (2, 4)$ je nenulový, takže uvnitř množiny přípustných řešení optimum být nemůže (z každého vnitřního bodu se lze posunout ve směru c a zisk zvýšit). Optimum leží na *hranici* – a protože je množina přípustných řešení omezený konvexní mnohoúhelník, nabývá se vždy v některém jeho *vrcholu*. To je analogie podmínky „$x^* \in \{a, b\}$“ z teorie.

5. Grafické řešení

Podmínka stroje dává $x_2 \leq 3{,}5$. Množina přípustných řešení je pětiúhelník s vrcholy

$$(0, 0), \qquad (2{,}5;\ 0), \qquad P, \qquad Q = (1{,}25;\ 3{,}5), \qquad (0;\ 3{,}5).$$

- P je průsečík přímek $2x_1 + 5x_2 = 20$ a $6x_1 + x_2 = 15$. Z druhé rovnice $x_2 = 15 - 6x_1$, dosazením do první $2x_1 + 75 - 30x_1 = 20$, tedy $x_1 = \frac{55}{28}$ a $x_2 = 15 - \frac{330}{28} = \frac{45}{14} \approx 3{,}21 \leq 3{,}5$.
- Q je průsečík $2x_1 + 5x_2 = 20$ a $x_2 = 3{,}5$: $2x_1 = 20 - 17{,}5$, tedy $x_1 = 1{,}25$ (a $6 \cdot 1{,}25 + 3{,}5 = 11 \leq 15$).



Posouváme vrstevnici $2x_1 + 4x_2 = \text{konst.}$ ve směru gradientu $c = (2, 4)$, dokud se ještě dotýká přípustné množiny. Porovnání hodnot ve vrcholech:

vrchol	$(0, 0)$	$(2{,}5;\ 0)$	$P = \left(\frac{55}{28}, \frac{45}{14}\right)$	$Q = (1{,}25;\ 3{,}5)$	$(0;\ 3{,}5)$
$2x_1 + 4x_2$	0	5	$\frac{235}{14} \approx 16{,}79$	16,5	14

Optimum je $x^* = \left(\frac{55}{28}, \frac{45}{14}\right) \approx (1{,}96;\ 3{,}21)$ kg se ziskem $\frac{235}{14} \approx 16{,}79$ Kč. Obě suroviny se spotřebují celé, stroj poběží $2 \cdot \frac{45}{14} = \frac{45}{7} \approx 6{,}43$ h ze 7 h. Podmínka stroje v optimu sice neplatí rovností, ale není nadbytečná: odřízne část množiny (bez ní by byl vrcholem bod $(0, 4)$).

Příklad 2. Dopravní problém

Proměnné

$x_{ij} \geq 0$ ... množství produktu přepravené od výrobce i k odběrateli j (spojité, produkt je neomezeně dělitelný).

Model

$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{(kapacita výrobce)} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{(požadavek odběratele)} \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i, j.
\end{aligned}$$

Poznámky.

- Úloha je přípustná právě tehdy, když $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$.
- Při kladných cenách c_{ij} se odběratelům v optimu nepošle víc, než chtějí, takže $\geq$ u požadavků lze nahradit $=$.
- Je-li $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ (*vyrovnaný* problém), platí rovnosti i u kapacit. Nevyrovnaný problém lze vyrovnat fiktivním odběratelem s požadavkem $\sum_i a_i - \sum_j b_j$ a nulovými cenami.

Příklad 3. Přiřazovací problém

1. Proměnné

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ ... $x_{ij} = 1$, pokud skupina S_i zhotoví zakázku Z_j. Proměnné jsou *binární* (logická rozhodnutí ano/ne). Zisky označíme c_{ij} podle tabulky.

Model

$$\begin{aligned}
\max \ & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{(každá skupina dělá jednu zakázku)} \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{(každou zakázku dělá jedna skupina)} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Pro naše data

$$\max \ 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 6x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + 4x_{32} + 4x_{33}.$$

Řešení. Přípustná řešení odpovídají permutacím, je jich $3! = 6$:

$(S_1, S_2, S_3) \to$	zisk
(Z_1, Z_2, Z_3)	$4 + 4 + 4 = 12$
(Z_1, Z_3, Z_2)	$4 + 3 + 4 = 11$
(Z_2, Z_1, Z_3)	$3 + 6 + 4 = \mathbf{13}$
(Z_2, Z_3, Z_1)	$3 + 3 + 4 = 10$
(Z_3, Z_1, Z_2)	$2 + 6 + 4 = 12$
(Z_3, Z_2, Z_1)	$2 + 4 + 4 = 10$

Optimum: $S_1 \to Z_2$, $S_2 \to Z_1$, $S_3 \to Z_3$ se ziskem 13 tis. Kč.

Poznámka. Přiřazovací problém je speciální dopravní problém ($m = n$, $a_i = b_j = 1$). Binární podmínku lze nahradit $0 \le x_{ij} \le 1$: LP relaxace má vždy celočíselné optimální vrcholy (matice soustavy je totálně unimodulární).

2. Unikátní zakázka vs. typ výrobku

- *Unikátní zakázka* (konkrétní zákazník): každou zakázku lze zhotovit nejvýše jednou, platí podmínka $\sum_i x_{ij} = 1$ (resp. ≤ 1, pokud zakázku nemusíme přijmout).
- *Typ výrobku*: tentýž typ může vyrábět více skupin, podmínka $\sum_i x_{ij} = 1$ odpadne (nebo se nahradí $\sum_i x_{ij} \le D_j$ podle poptávky). Každá skupina pak zvolí nejziskovější typ: $S_1 \to Z_1$ (4), $S_2 \to Z_1$ (6), S_3 libovolně (4), celkem 14 tis. Kč. Model se rozpadne na tři nezávislé úlohy.

Příklad 4. Problém obchodního cestujícího

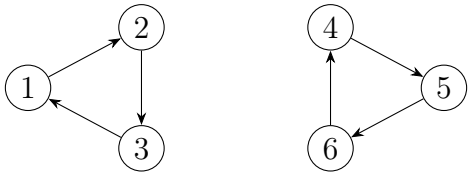
Proměnné

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ … $x_{ij} = 1$, pokud cestující jede přímo od zákazníka i k zákazníkovi j ($i \ne j$).

První pokus – přiřazovací problém

$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j \ne i} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{(z každého místa odjede jednou)} \\
& \sum_{i \ne j} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n \quad \text{(do každého místa přijede jednou)} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

To ale *nestačí*: podmínkám vyhovuje i řešení složené z několika oddělených cyklů (*podcyklů*), např. pro $n = 6$ cykly $1 \to 2 \to 3 \to 1$ a $4 \to 5 \to 6 \to 4$. Taková řešení nejsou jednou cestou.



Vyloučení podcyklů

Podcykly zakážeme podmínkou: z každé neprázdné *vlastní* podmnožiny zákazníků S (tj. $S \neq \emptyset$, $S \neq \{1, \ldots, n\}$) musí cestující alespoň jednou odjet ven,

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1, \qquad \emptyset \neq S \subsetneq \{1, \ldots, n\}.$$

V příkladu výše pro $S = \{1, 2, 3\}$ žádná hrana z S ven nevede, levá strana je 0 a podmínka je porušena. Naopak jedna okružní cesta přes všechny zákazníky opouští každou vlastní podmnožinu S alespoň jednou (jinak by se do zákazníků mimo S nedostala), takže podmínky splňuje.

Kompletní model:

$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j \neq i} x_{ij} = 1, && i = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{i \neq j} x_{ij} = 1, && j = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1, && \emptyset \neq S \subsetneq \{1, \ldots, n\}, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

Poznámky.

- Stačí podmnožiny s $2 \leq |S| \leq n - 2$: pro $|S| = 1$ (a doplňkově $|S| = n - 1$) plyne podmínka už z přiřazovacích rovností.
- Podmínek je exponenciálně mnoho ($\approx 2^n$). V praxi se nepřidávají všechny najednou: vyřeší se úloha bez nich, najde se porušený podcyklus S a přidá se jen jeho podmínka.
- Ekvivalentní (Dantzig–Fulkerson–Johnson) tvar je $\sum_{i \in S} \sum_{j \in S,\, j \neq i} x_{ij} \leq |S| - 1$: uvnitř S nesmí vzniknout uzavřený cyklus.