

CVIČENÍ IV

TEORIE

Definice 2.19.: Pro množinu $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$ definujeme:

$$\text{lineární obal} \quad \dots \quad \mathcal{L}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s : \lambda(s) \in \mathbb{R} \forall s \in I, \emptyset \neq I \subset S, I \text{ konečná} \right\};$$

$$\text{afinní obal} \quad \dots \quad \text{Aff}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s : \lambda(s) \in \mathbb{R} \forall s \in I, \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1, \emptyset \neq I \subset S, I \text{ konečná} \right\};$$

$$\text{nezáporný obal} \quad \dots \quad \text{pos}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s : \lambda(s) \geq 0 \forall s \in I, \emptyset \neq I \subset S, I \text{ konečná} \right\};$$

$$\text{konvexní obal} \quad \dots \quad \text{conv}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s : \lambda(s) \geq 0 \forall s \in I, \sum_{s \in I} \lambda(s) = 1, \emptyset \neq I \subset S, I \text{ konečná} \right\}.$$

Pro prázdnou množinu definujeme $\mathcal{L}(\emptyset) = \text{pos}(\emptyset) = \{0\}$, $\text{Aff}(\emptyset) = \text{conv}(\emptyset) = \emptyset$.

Definice 2.24.: Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna konvexní množina. Pak bod $a \in A$ nazýváme *krajní bod množiny A*, pokud neexistuje dvojice bodů $x, y \in A$, $x \neq y$ a $0 < \alpha < 1$ tak, aby $a = \alpha x + (1 - \alpha)y$.

Množinu všech krajních bodů množiny A budeme označovat $\text{ext}(A)$.

Definice 2.23.: Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna konvexní množina. Pak $s \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *směrem množiny A*, pokud existuje $a \in A$ tak, že celá polopřímka $\{a + ts : t \geq 0\}$ leží v množině A .

Množinu všech směrů množiny A budeme označovat $\text{direct}(A)$.

Definice 2.25.: Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna konvexní množina. Pak směr $s \in \text{direct}(A)$, $s \neq 0$ nazýváme *krajním směrem množiny A*, pokud neexistuje dvojice směrů $x, y \in \text{direct}(A)$, $x \notin \text{pos}(s)$, $y \notin \text{pos}(s)$ a $\alpha > 0, \beta > 0$ tak, aby $s = \alpha x + \beta y$.

Množinu všech krajních směrů množiny A , které mají jednotkovou velikost, budeme označovat $\text{extd}(A)$, tj.

$$\text{extd}(A) = \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| = 1, s \text{ je krajní směr } A\}.$$

PŘÍKLADY

Příklad 0: Mějme body $[0, 1]$, $[1, 0]$ a $[1, 1]$. Jak vypadá jejich:

- konvexní obal?
- nezáporný obal?
- afinní obal?
- lineární obal?

Příklad 1. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rll} \min & 3x_1 - x_2 & \\ \text{za podmíněk} & 2x_1 + x_2 \geq 2 & \\ & -4x_1 + 2x_2 \leq 6 & \\ & x_1 \geq 0 & \\ & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Příklad 2. Řešte předchozí příklad s maximalizací místo minimalizace.

Příklad 3. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rll} \min & 2x_1 + 2x_2 & \\ \text{za podmíněk} & x_1 - x_2 \leq 5 & \\ & x_1 + 2x_2 \leq -2 & \\ & -x_1 \leq 1 & \\ & x_1 \geq 0 & \\ & x_2 \leq 0 & \end{array}$$

Příklad 4. Řešte předchozí příklad s maximalizací místo minimalizace.

Příklad 5. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rll} \max & 2x_1 + 4x_2 & \\ \text{za podmíněk} & x_1 + x_2 \leq 4 & \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 & \\ & x_1 - x_2 \leq 0 & \\ & x_1 \geq 0 & \\ & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Příklad 6. Řešte předchozí příklad s minimalizací místo maximalizace.

Příklad 7. V předchozím příkladě maximalizujte funkci $x_1 + x_2$.

Příklad 8. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{rll} \max & 2x_1 - 6x_2 & \\ \text{za podmíněk} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 & \\ & x_1 - x_2 \geq -1 & \\ & -x_1 - 2x_2 \geq 1 & \\ & x_1 \geq 0 & \\ & x_2 \geq 0 & \end{array}$$