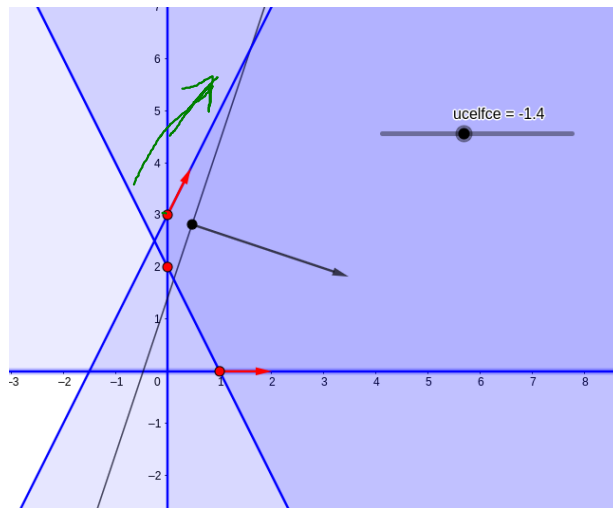


Přímá metoda řešení LP

Příklad 5.1. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{array}{llllll} \min & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{za podmíněk} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & -4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - x_2 \\ \min & (-3, 1) \end{array}$$



→ standardní tvar

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{za podmíněk} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \min & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{za podmíněk} & 2x_1 & + & x_2 & - x_3 & = & 2 \\ & -4x_1 & + & 2x_2 & + x_4 & = & 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definice 3.11.: Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, která má plnou řádkovou hodnot. Vyberme nějakou množinu indexů proměnných $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tak, aby obsahovala právě m různých položek. Vezmeme příslušné sloupce matice A a sestavíme z nich čtvercovou matici $A_L = (A_{j,i})$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \in L$.

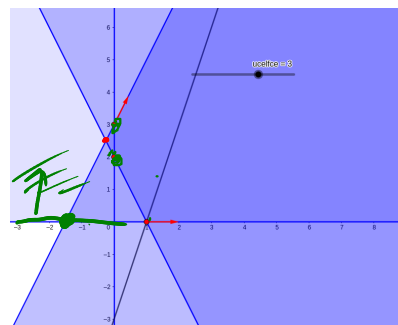
- Pokud je matice A_L regulární, pak říkáme, že L je báze úlohy (3.4).
- Když L je báze úlohy (3.4), pak k ní přísluší $x(L) \in \mathbb{R}^n$, které je jednoznačně určené podmínkami $Ax(L) = b$ a $x(L)_i = 0$ pro všechna $i \notin L$. Bod $x(L)$ nazýváme bazické řešení příslušné k bázi L .
- Nechť L je báze úlohy (3.4) a bazické řešení $x(L)$ je nezáporné. Pak mluvíme o přípustné bázi.
- Nechť L je báze úlohy (3.4) a příslušné bazické řešení $x(L)$ je optimálním řešením úlohy (3.4). Pak mluvíme o optimální bázi.
- Říkáme, že x je bazické řešení úlohy (3.4), jestliže existuje báze L tak, že $x = x(L)$.
- Říkáme, že x je přípustné bazické řešení úlohy (3.4), jestliže existuje přípustná báze L tak, že $x = x(L)$.
- Říkáme, že x je optimální bazické řešení úlohy (3.4), jestliže existuje optimální báze L tak, že $x = x(L)$.

Uvědomme si, že bazické řešení je opravdu jednoznačně určeno příslušnou bázi.

Lemma 3.12.: Nechť $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$ je báze úlohy (3.4). Potom příslušné bazické řešení je určeno jednoznačně a je tvaru $x(L)_L = (A_L)^{-1}b$, $x(L)_i = 0$ pro $i \notin L$.

Věta 3.13.: Pokud matice A má plnou řádkovou hodnot, pak množina $\text{ext}(M)$ je rovna množině všech přípustných bazických řešení.

Věta 3.13 dává návod jak numericky počítat krajní body M : Projdeme postupně všechny možnosti volby $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{card}(L) = m$. Pokud A_L není regulární přejdeme k další volbě L . Když je A_L regulární, pak řešíme soustavu $A_L \xi = b$, tj. $\xi = (A_L)^{-1}b$. Když $\xi \geq 0$, pak jsme našli $x(L)$ krajní bod M , kde $x(L)_L = \xi = (A_L)^{-1}b$, $x(L)_{I \setminus L} = 0$.



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_L^T A_L x_L = \tilde{A} b$$

$$x_L = A_L^{-1} b$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 4x_2 &= 10 \\ x_2 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, 0, -5, 0\right)$$

2. omezení

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(1, 0, 0, 10)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(0, 3, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(0, 2, 0, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(0, 0, -2, 6)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lístek s poznámkou

29.03.20 11:13

Martin Branda

Tento vztah platí pouze jako inkluze, tj. všechny krajní směry jsou obsaženy v takto charakterizované množině. Abychom dostali rovnost, je potřeba přidat podmínku na plnou řádkovou hodnost, viz odstavec níže "Věta 3.14 dává ...".

Věta 3.14.: Pokud hodnost matice A je m , pak platí

$$\text{extd}(M) = \{y \in \text{direct}(M) : \text{card}(S^+(y)) \leq m+1, \|y\| = 1\}. \quad (3.9)$$



Důkaz: Důkaz je uveden například v [1], věta 2.6.6., p.70.

Q.E.D.

Věta 3.14 dává návod jak numericky počítat krajní směry M :

Projdeme postupně všechny možnosti volby $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{card}(K) = \overline{m+1}$. Pokud A_K nemá plnou řádkovou hodnost, přejdeme k další volbě K . Když A_K má plnou řádkovou hodnost, pak nalezneme netriviální řešení soustavy $A_K \eta = 0$. Když $\eta \geq 0$, pak jsme našli $y(K)$ krajní směr M , kde $y(K)_K = \frac{1}{\|\eta\|} \eta$, $y(K)_{I \setminus K} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

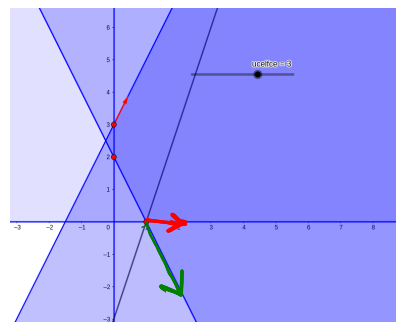
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 4x_1 \\ x_2 &= 2x_1 \end{aligned}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~$(1, -2, 0, 6)$~~



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~$(1, 0, 2, 4)$~~

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~$(0, 1, 1, -2)$~~

Řešení optimalizační úlohy:

- (1) Neexistuje-li žádný krajní bod, úloha nemá řešení.
- (2) Pokud v nějakém krajním směru má účelová funkce zápornou hodnotu, úloha nemá řešení, funkce neomezeně klesá v tomto směru.
- (3) Jinak je jedním z optimálních řešení některý z krajních bodů, ten s nejmenší hodnotou účelové funkce.
 - Pokud takových bodů je více, je řešením i úsečka mezi těmito body.
 - Pokud má navíc účelová funkce nulovou hodnotu pro nějaký krajní směr s^* , úloha má nekonečně mnoho řešení, která jsou tvaru $x^* + ts^*, t \geq 0$, kde x^* je krajní bod s nejmenší hodnotou účelové funkce.

$$c^T y < 0$$

$$(3, -1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \checkmark$$

$$(-3, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \checkmark$$

Příklad 5.13. Převeďte následující úlohu do standardního tvaru (případně do tvaru nerovností):

$$\begin{array}{ll} \max & -3x_1 + 5x_2 \\ \text{za podmínek} & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 8x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ & 2x_2 + x_3 \leq -2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$x_3^* = x_3^+ - x_3^-$$

$$x_2^* = -\hat{x}_2^*$$

f^*

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$\min 3x_1 + 5\hat{x}_2$$

$$5x_1 - 4\hat{x}_2 + x_3^+ - x_3^- - x_4 = 2$$

$$8x_1 - \hat{x}_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- = 1 \quad \hat{x}_2 = -x_2$$

$$-2\hat{x}_2 + x_3^+ - x_3^- + x_5 = -2 \quad x_3 = x_3^+ - x_3^-$$

$$\hat{x}_2 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

$$x_3^+ \geq 0$$

$$x_5 \geq 0$$

$$x_3^- \geq 0$$

$$c \quad x_1 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -2 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$